Exame nacional de Matemática A **(2011, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um jovem inscrito no clube, e os acontecimentos:
   A:≪O jovem pratica andebol≫
   F:≪O jovem pratica futebol≫
   Sabemos que existem 28 jogadores que jogam apenas futebol e 12 que jogam futebol e andebol, ou seja, o número total de praticantes de futebol é de $28 + 12 = 40$
   De entre estes, apenas 12 jogam andebol, pelo que a probabilidade de selecionar ao acaso um jovem inscrito, de entre os praticantes de futebol, e ele também jogar andebol é

   $$P(A|F) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

   Resposta: **Opção B**

2. Usando o modelo binomial $\left(P(X=k) = {}^nC_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$, temos que $n = 5$.

   Para o acontecimento I, $p = q = \frac{1}{2}$ e $k = 2$.

   Para o acontecimento J, $p = \frac{1}{6}$, pelo que $q = \frac{5}{6}$ e $k = 2$.

   Assim, temos que:

   - $P(I) = P(X=2) = {}^5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16} \approx 0{,}31$
   - $P\left(\overline{I}\right) = 1 - P(I) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16} \approx 0{,}69$
   - $P(J) = P(Y=2) = {}^5C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10\left(\frac{5^3}{6^5}\right) \approx 0{,}16$
   - $P\left(\overline{J}\right) = 1 - P(J) = 1 - \frac{10 \times 5^3}{6^5} \approx 0{,}84$

   Logo o acontecimento mais provável é o acontecimento $\overline{J}$.

   Resposta: **Opção D**

3. Como A e B são acontecimentos incompatíveis, temos que $A \cap B = \emptyset$, ou seja, $P(A \cap B) = 0$

   Pelas leis de De Morgan temos que $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}3 \Leftrightarrow P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0{,}3$, e assim

$$P(A \cup B) = 1 - P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

   Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = P(B)$, calculamos o valor de $P(B)$, substituindo os valores conhecidos:

$$P(B) = 0{,}7 + 0 - 0{,}5 = 0{,}2$$

   Resposta: **Opção A**

4.
   - Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ então a reta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico de f
   - Como $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + 2x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (-2x)) = 0$ então a reta de equação $y = -2x + 0$ é assíntota do gráfico de f

   Logo as assíntotas do gráfico de f são definidas por $y = 1$ e $y = -2x$

   Resposta: **Opção C**

5. Determinando a expressão da primeira, e depois da segunda derivada, temos:

$$f'(x) = (ax^2 - 1)' = 2ax + 0 = 2ax$$

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = (2ax)' = 2a$$

   Como o gráfico de f'' é a reta de equação $y = 2a$, e pela observação do gráfico, podemos constatar que $2a < 0$, logo $a < 0$.
   Assim, das opções apresentadas, apenas o valor -3 é compatível com a condição $a < 0$.

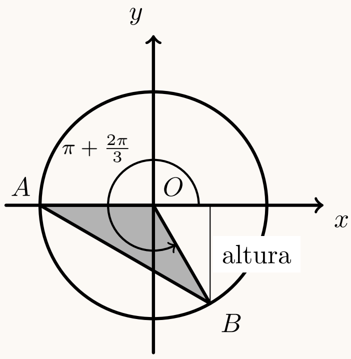
   Resposta: **Opção D**

6. Como se trata de um círculo trigonométrico, o ponto B tem coordenadas $B\left(\cos\frac{5\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$, porque o segmento $[OB]$, define com o semieixo postivo Ox um ângulo de $\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ radianos.

   Podemos considerar como a medida da base do triângulo $\overline{OA} = 1$ e o valor absoluto da ordenada de B como a medida da altura:
   $|y_B| = \left|\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right| = \left|-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   Assim, calculando a área do triângulo vem:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times |y_B|}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



   Resposta: **Opção A**

7. Para que z_1 seja igual ao conjugado de z_2, tem que se verificar a condição
$\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \quad \wedge \quad \text{Im}(z_1) = -\text{Im}(z_2)$

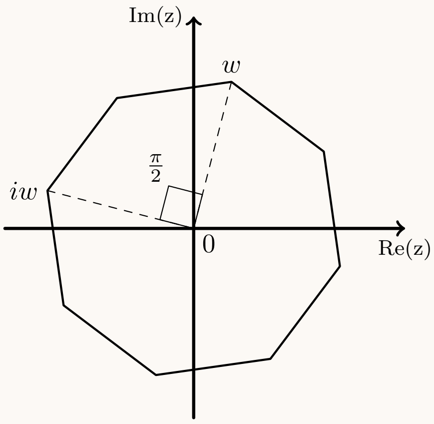
Logo:

$$\begin{cases} \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \\ \\ \text{Im}(z_1) = -\text{Im} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k+2 = 3p-4 \\ \\ p = -(2-5k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k+6 = 3p \\ \\ p = 5k-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+2 = p \\ \\ k+2 = 5k-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k+2 = p \\ \\ 2+2 = 5k-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+2 = p \\ \\ 4 = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2 = p \\ \\ 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = p \\ \\ 1 = k \end{cases}$$

Resposta: **Opção B**

8. Sendo a imagem geométrica de w o vértice A do octógono, designemos por z a imagem geométrica do vértice C do octógono.



Como os dois números complexos são raízes de índice 8 de um mesmo número complexo, temos que $|w| = |z|$.

Como o octógono está centrado na origem, e tem oito lados, o ângulo AOB tem de amplitude $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ radianos. Como o ângulo BOC tem a mesma amplitude, temos que o ângulo AOC tem de amplitude $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ radianos.

Ou seja $\arg(z) = \arg(w) + \frac{\pi}{2}$, e como $|w| = |z|$ podemos afirmar que $z = w \times i$

Resposta: **Opção C**

GRUPO II

1.

1.1. Como $i^{4n+2014} = i^{4n+4\times 53+2} = i^{4(n+53)+2} = i^2 = -1$, temos que $z_1 = 2 + \sqrt{3}i + (-1) = 1 + \sqrt{3}i$

Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta$, onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ como $\operatorname{sen} \theta > 0$ e $\cos \theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{3}$

Assim $z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$, e como $\sqrt[3]{z} = z_1$, recorrendo à fórmula de Moivre para a potência, temos que:

$$z = (z_1)^3 = \left(2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}\right)^3 = 2^3 \operatorname{cis}\left(3 \times \frac{\pi}{3}\right) = 8 \operatorname{cis} \pi = -8$$

1.2. **A opção (I) não representa a região** definida pela condição porque não satisfaz a condição $\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 2\pi$.
Os números complexos que verificam esta condição têm as respetivas representações geométricas nos 2º, 3º e 4º quadrantes, ao contrário dos pontos assinalados na opção (I).

A opção (II) não representa a região definida pela condição porque não satisfaz a condição $|z| \geq |z - z_2|$.
Os números complexos que satisfazem esta condição têm as repetivas representações geométricas no semiplano delimitado pela bissetriz do segmento de reta $[OC]$ e que contém o ponto C, ou seja os pontos cuja distância à origem é não inferior à distância ao ponto C. Os pontos assinalados na opção (II) estão mais perto da origem do que do ponto C.

A opção (III) não representa a região definida pela condição porque não satisfaz a condição $|z - z_2| \leq 1$.
Os números complexos que verificam esta condição têm as respetivas representações geométricas no interior da circunferência de raio 1 e centro em C, e alguns pontos assinalados na opção (III) estão no exterior desta circunferência (pertencem ao interior da circunferência com o mesmo raio, mas centrada na origem).

Logo **a opção correta é a opção (IV)**.

2. Temos que:

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{A \cap B}|B\right) &= \frac{P\left(\left(\overline{A \cap B}\right) \cap B\right)}{P(B)} && \text{Definição: } P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \\
&= \frac{P\left(\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap B\right)}{P(B)} && \text{Leis de De Morgan: } \overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \\
&= \frac{P\left(\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{B} \cap B\right)\right)}{P(B)} && \\
&= \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P(B)} && \overline{B} \cap B = \emptyset \text{ e } X \cup \emptyset = X \\
&= P(\overline{A}|B) && \text{Definição: } P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}
\end{aligned}
$$

Logo, se $P(B) \neq 0$ então $P\left(\overline{A \cap B}|B\right) = P(\overline{A}|B)$ *q.e.d.*

3.

3.1. Se considerarmos o bloco das três cartas como um elemento único, temos um conjunto de 11 elementos (o bloco das 3 figuras e as restantes 10 cartas) para serem dispostos em 11 posições, ou seja, ${}^{11}A_{11} = P_{11} = 11!$ disposições diferentes.
Por cada uma das disposições anteriores, temos que considerar, adicionalmente, as trocas possíveis das 3 figuras no bloco das 3 cartas, ou seja, ${}^{3}A_3 = P_3 = 3!$ trocas possíveis.

Assim, o número de sequências diferentes que é possível construir, de modo que as três figuras fiquem juntas é

$$11! \times 3! = 239\,500\,800$$

3.2. Ao retirar 4 cartas de um conjunto de 13, podemos obter ${}^{13}C_4$ conjuntos diferentes de 4 cartas (entendendo a extração simultânea, e por isso, considerando irrelevante a ordem), ou seja, ${}^{13}C_4$ é o número de casos possíveis.
Como, obter pelo menos duas figuras, significa, obter 2 figuras ou obter 3 figuras, podemos calcular o número de casos favoráveis, como a soma dos números de casos relativos a duas situações distintas:

- Retirar 3 figuras e uma das outras cartas.
  Nesta situação, existem ${}^{3}C_3 \times^{10} C_1 = 1 \times 10 = 10$ conjuntos diferentes.
- Retirar duas figuras e duas das outras cartas.
  Nesta situação, existem ${}^{3}C_2 \times^{10} C_2$ conjuntos diferentes, correspondentes a selecionar as 2 figuras de entre as 3 existentes e 2 das restantes 10 cartas.

Assim, a probabilidade de, ao retirar, ao acaso, 4 das 13 cartas do naipe de copas, obter pelo menos duas figuras, é

$$\frac{10 +^{3} C_2 \times^{10} C_2}{{}^{13}C_4} = \frac{29}{143}$$

4. Como a máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível, logo a quantidade de combustível que existia no depósito no momento inicial era a quantidade medida ao fim de 20 minutos acrescida dos 2 litros consumidos, ou seja,

$$Q(0) = Q(20) + 2 \Leftrightarrow Q(0) - Q(20) = 2$$

Logo, determinando o valor de k, temos que

$$Q(0) - Q(20) = 2 \Leftrightarrow 12 + \log_3(81 - k \times 0^2) - \left(12 + \log_3(81 - k \times 20^2)\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 + \log_3(81 - 0) - 12 - \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow \log_3(81) - \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow -\log_3(81 - 400k) = 2 - 4 \Leftrightarrow \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^2 = 81 - 400k \Leftrightarrow 400k = 81 - 3^2 \Leftrightarrow k = \frac{72}{400} \Leftrightarrow k = \frac{9}{50}$$

5.

5.1. Sabendo que f é contínua em $x = -1$, temos que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

Calculando $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ vem:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \left(\frac{x+1}{1 - e^{x+1}} + 1\right) = \frac{-1+1}{1 - e^{-1+1}} + 1 = \frac{0}{0} + 1 \text{ (Indeterminação)}$$

(fazendo $y = x + 1$, temos que se $x \to -1$, então $y \to 0$)

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(\frac{x+1}{1 - e^{x+1}}\right) + \lim_{x \to -1} 1 = \lim_{y \to 0} \left(\frac{y}{1 - e^{y}}\right) + 1 = \lim_{y \to 0} \left(\frac{1}{\frac{1 - e^{y}}{y}}\right) + 1 =$$

$$= \frac{\lim\limits_{y \to 0} 1}{\lim\limits_{y \to 0} \frac{-(-1 + e^{y})}{y}} + 1 = \frac{1}{\underbrace{-\lim\limits_{y \to 0} \frac{e^{y} - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} + 1 = \frac{1}{-1} + 1 = -1 + 1 = 0$$

Assim, como $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$ e $f(-1) = a + 2$, podemos determinar o valor de a:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

5.2. Começamos por determinar a expressão da derivada para $x \neq -1$:

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{1-e^{x+1}} + 1\right)' = \left(\frac{x+1}{1-e^{x+1}}\right)' + (1)' = \frac{(x+1)'(1-e^{x+1}) - (x+1)(1-e^{x+1})'}{(1-e^{x+1})^2} + 0 =$$

$$= \frac{1 \times (1-e^{x+1}) - (x+1)\big((1)' - (x+1)'e^{x+1}\big)}{(1-e^{x+1})^2} = \frac{1-e^{x+1} - (x+1)\big(0 - 1 \times e^{x+1}\big)}{(1-e^{x+1})^2} =$$

$$= \frac{1-e^{x+1} - (x+1)\big(-e^{x+1}\big)}{(1-e^{x+1})^2} = \frac{1-e^{x+1} - \big(-xe^{x+1} - e^{x+1}\big)}{(1-e^{x+1})^2} =$$

$$= \frac{1-e^{x+1} + xe^{x+1} + e^{x+1}}{(1-e^{x+1})^2} = \frac{1+xe^{x+1}}{(1-e^{x+1})^2}$$

Como a função f' resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é uma função contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, e, por isso, também é contínua em $[0,1]$.

Como $\frac{1}{4} = 0{,}25$, temos que $0{,}21 < \dfrac{1}{4} < 0{,}34$, ou seja, $f'(1) < \dfrac{1}{4} < f'(0)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]0,1[$ tal que $f'(c) = \dfrac{1}{4}$, ou seja, que a equação $f'(x) = \dfrac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em $]0,1[$.

C.A.

$$f'(0) = \frac{1+0\times e^{0+1}}{(1-e^{0+1})^2} = \frac{1+0}{(1-e^1)^2} = \frac{1}{(1-e)^2} \approx 0{,}34$$

$$f'(1) = \frac{1+1\times e^{1+1}}{(1-e^{1+1})^2} = \frac{1+e^2}{(1-e^2)^2} = \frac{1}{(1-e)^2} \approx 0{,}21$$

6.

6.1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{f(x) - \pi} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\pi - 4\operatorname{sen}(5x) - \pi} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{-4\operatorname{sen}(5x)} = -\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{x}{\operatorname{sen}(5x)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}(5x)} = -\frac{1}{4} \times 1 \times \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}} =$$

(fazendo $y = 5x$ temos que $x = \frac{y}{5}$, e se $x \to 0$, então $y \to 0$)

$$= -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{\frac{y}{5}}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{5\operatorname{sen}(y)}{y}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{5\operatorname{sen}(y)}{y}} =$$

$$= -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\underbrace{5\lim\limits_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{5 \times 1} = -\frac{1}{20}$$

6.2. Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$g''(x) = (g'(x))' = \left(\log_2\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)\right)' = \frac{\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)'}{\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)\ln 2} = \frac{-\left(\frac{\pi}{6}\right)' - (x)'}{\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)\ln 2} = \frac{-1}{\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)\ln 2}$$

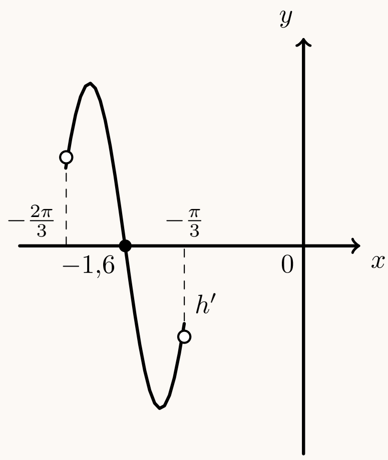
Assim temos que a equação $g''(x) = 0$ é impossível, pelo que o gráfico da função g **não tem qualquer ponto de inflexão**.
Relativamente ao sentido das concavidades do gráficos, temos que, no intervalo em qua a função está definida, $-\frac{\pi}{6} - x > 0$, pelo que também $\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)\ln 2 > 0$
Assim, o quociente $\frac{-1}{\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)\ln 2}$ toma sempre valores negativos no domínio da função, isto é, $g''(x) < 0\,,\ \forall x \in \left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$, ou seja, o gráfico de g **tem a concavidade voltada para baixo** em todo o domínio.

7. Sabemos que o declive da reta tangente ao gráfico de h, no ponto A, é zero, porque a tangente é paralela ao eixo Ox.

Por outro lado o declive (m) da reta tangente em qualquer ponto é
$m = h'(x)$, e $h'(x) = (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$, pelo que é necessário determinar a derivada de f:

$f'(x) = (\pi - 4\,\text{sen}\,(5x))' = (\pi)' - (4\,\text{sen}\,(5x))' = 0 - 4 \times 5\cos(5x) = -20\cos(5x)$

Assim, como $m = h'(x)$ e $m = 0$, temos que a abcissa do ponto A é a solução da equação:
$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = 0 \Leftrightarrow -20\cos(5x) - \log_2\left(-\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$
Logo, podemos traçar na calculadora o gráfico da função h', numa janela compatível com o domínio (ou seja o domínio de g'), que se reproduz na figura ao lado.



Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados dos zeros de uma função, podemos determinar o valor (aproximado às décimas) do único zero da função, que coincide com a abcissa do ponto A:

$$x \approx -1{,}6$$